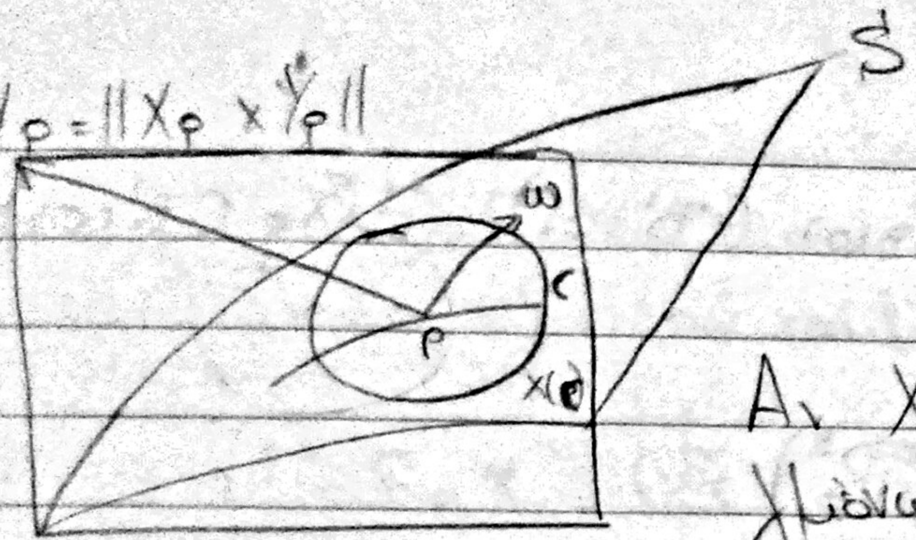
$X_\varphi \times Y_\varphi = \| X_\varphi \times Y_\varphi \|$



13-11-17

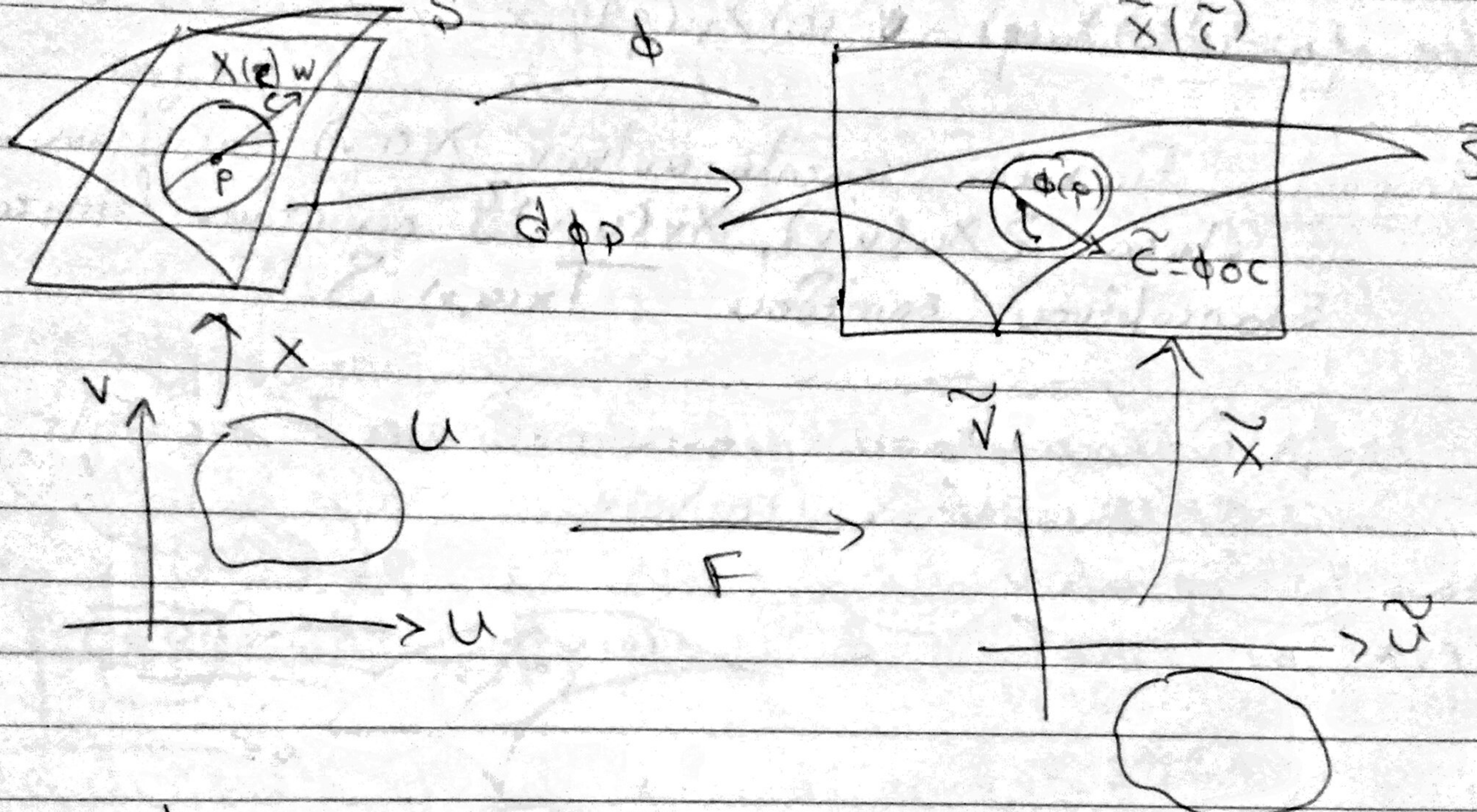
Αν $X: U \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με $\varphi \in X(u)$, τότε τα X_u, X_v είναι βάση του $T_p S$

$T_p S \subset T_p \mathbb{R}^3$

Διαφορικό απεικονίσεων μεταξύ κανονικών επιφανειών

Ορισμός: Έστω $\varphi: S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$. Καλούμε διαφορικό της φ στο σημείο $p \in S$ την απεικόνιση $d\varphi_p: T_p S \to T_{\varphi(p)} \tilde{S}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $\omega \in T_p S$ με $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ και $c(0) = p$, $c'(0) = \omega$. Θέτουμε $\tilde{c} = \varphi \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{S}$ και $\tilde{c}(0) = \varphi(p)$.

Ορίζω $d\varphi_p(\omega) = \tilde{c}'(0)$



Έχουμε $\phi(x(U)) = \tilde{x}(\tilde{U})$ όπου $\tilde{x}^{-1}\circ\phi\circ x = F$ είναι διαφορίσιμη.
Παίρνουμε: $F(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$ με $c(t) = x(u(t), v(t))$
$\tilde{c}(t) = \tilde{x}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ Δείχνουμε ότι το $d\phi_p(w)$ είναι καλά ορισμένο
όπου $\tilde{c}(t) = \phi\circ c(t) \Rightarrow \tilde{x}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \phi\circ x(u(t), v(t))$
$\Rightarrow (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \tilde{x}^{-1}\circ\phi\circ x(u(t), v(t)) \Rightarrow (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = F(u(t), v(t))$

$\Leftrightarrow (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = (\phi_1(u(t),v(t)), \phi_2(u(t),v(t)))$

Παίρνουμε $w = u'(0)X_u + v'(0)X_v$

$$\tilde{c}'(0) = \tilde{u}'(0)\tilde{X}_{\tilde{u}} + \tilde{v}'(0)\tilde{X}_{\tilde{v}}$$

με $\tilde{u}(t) = \phi_1(u(t),v(t)) \Rightarrow \tilde{u}'(0) = u'(0)\dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} + v'(0)\dfrac{\partial \phi_1}{\partial v}$

$\tilde{v}(t) = \phi_2(u(t),v(t)) \Rightarrow \tilde{v}'(0) = u'(0)\dfrac{\partial \phi_2}{\partial u}(\ldots) + v'(0)\dfrac{\partial \phi_2}{\partial v}(\ldots)$

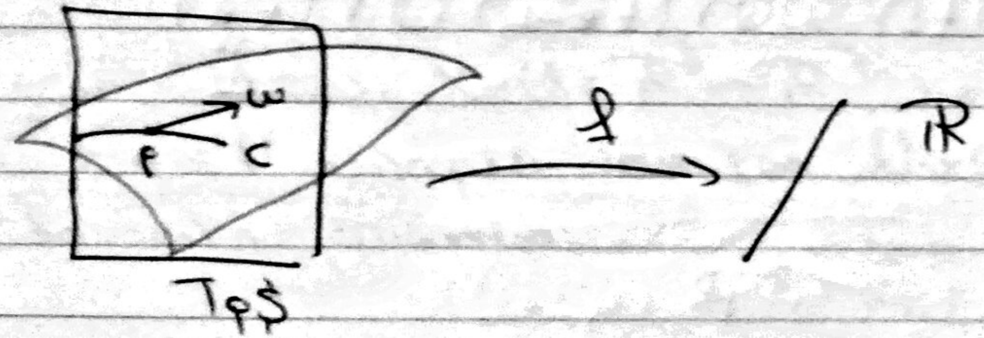
$\Rightarrow \tilde{c}'(0) =$ ανεξάρτητη της καμπύλης c

$\square$

Συμπέρασμα: Το διαφορικό είναι καλά ορισμένο και γραμμική απεικόνιση

Διαφορικό διαφορίσιμης συνάρτησης

Ορισμός: Έστω $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, επί της κανονικής επιφάνειας S. Καλούμε διαφορικό της f στο $p \in S$ της απεικόνισης $df_p : T_pS \to \mathbb{R}$ με $df_p(w) = (f \circ c)'(0)$, όπου $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$.



Παράδειγμα Έστω S κανονική επιφάνεια και $e \in \mathbb{R}^3$. Ορίζω τη συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$ με $f(p) = \langle p, e \rangle$

Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με $f \circ X: U \to \mathbb{R}$ με $f \circ X(u,v) = \langle X(u,v), e \rangle$. Η $f \circ X$ διαφορίσιμη $\to$ f διαφορίσιμη

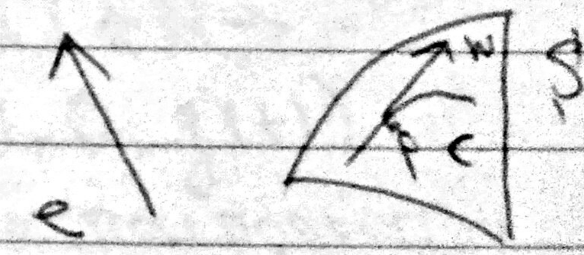
Παίρνουμε $p \in S$ και $w \in T_pS$ και $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = v$

Τότε $Tf_p: T_pS \to \mathbb{R}$ με $Tf_p(w) = (f \circ c)'(0)$

$$(f \circ c)(t) = f(c(t)) = \langle c(t), e \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ c)'(0) = \langle c'(0), e \rangle = \langle w, e \rangle$$

Τότε $df_p(w) = \langle w, e \rangle$



□

Διαφορικά διανυσματικών συναρτήσεων ορισμένων σε κανονική επιφάνεια

$F: S \to \mathbb{R}^3$ με $F=(f,g,h)$

Τότε $dF_p : T_pS \to T_{F(p)}\mathbb{R}$ με $dF_p = (df_p, dg_p, dh_p)$

Μια συνάρτηση είναι σταθερή, εάν το διαφορικό της είναι ίσο με το μηδέν και το πεδίο ορισμού της συνεκτικό σύνολο.

Σχόλιο.

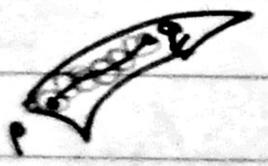
Θεώρημα: Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη.
Αν $df_p = 0,\ \forall p \in S \Rightarrow$ η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Υποθέτω ότι $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με U ανοικτό

$$df = 0 \Leftrightarrow df(X_u) = 0 = df(X_v)$$

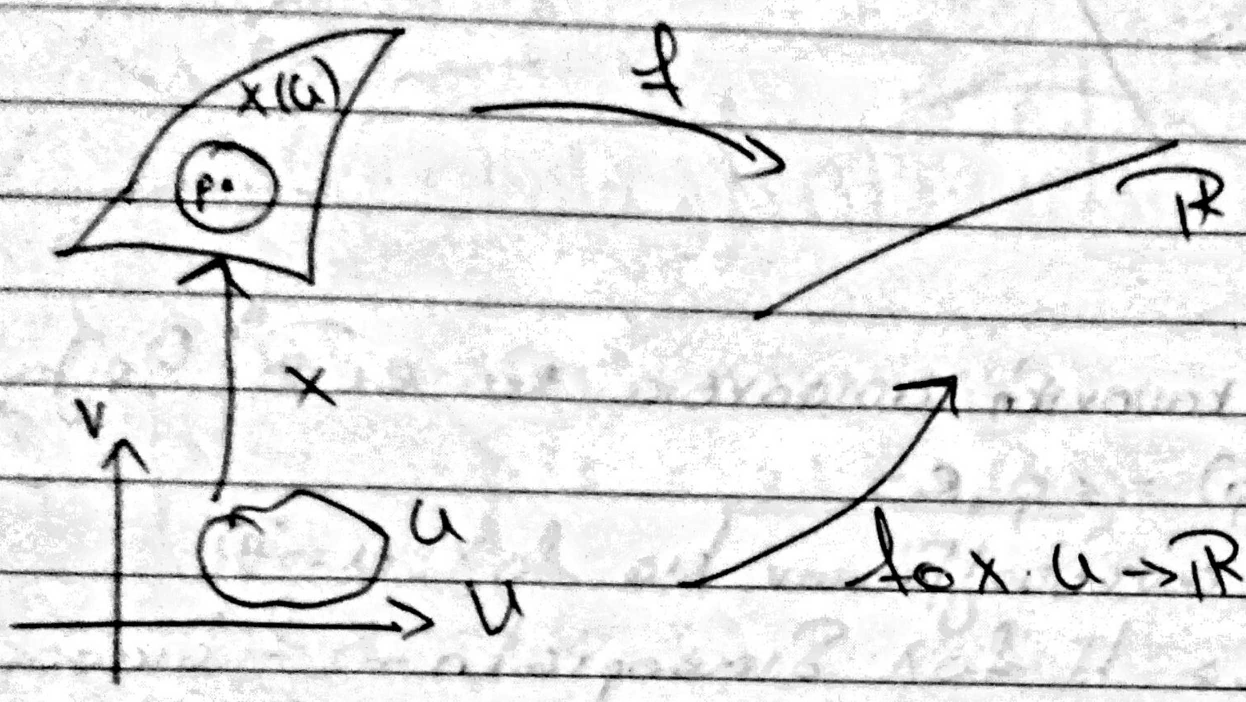
$\Leftrightarrow (f\circ X)_u = 0 = (f \circ X)_v \Leftrightarrow f\circ X$ σταθερή $\Rightarrow f$ σταθερή στο $X\,V$

Όμως $c:[0,1] \to S$ με $c(0)=p$ και $c(1)=q$ τότε
$(\forall t)(\exists V(t))$ ανοικτό ώστε



$f|V(t) = a_t =$ σταθερό με $\underset{\text{συμπαγής}}{c([0,1])} \subset \bigcup_{0\le t<1} V(t)$ $\Rightarrow$

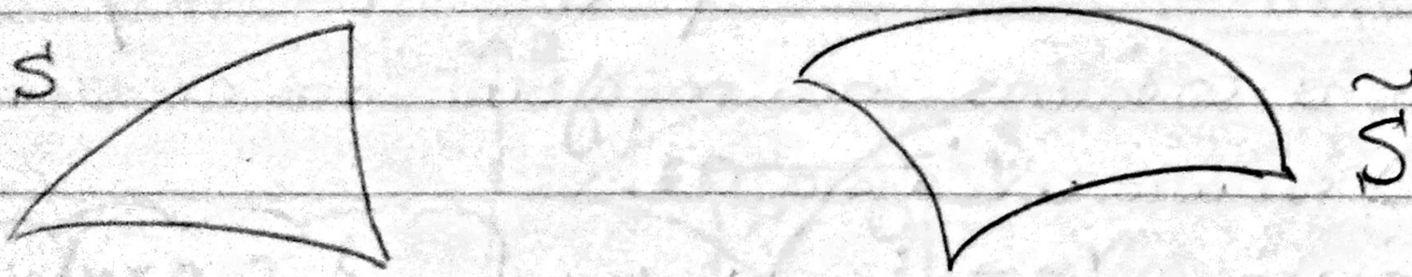
$$\Rightarrow c([0,1]) \subset V(\underset{\substack{\shortparallel \\ t_0}}{0}) \cup V(t_1) \ldots \cup V(t_{k-1}) \cup V(\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{t_k})$$



□

Πόρισμα: Αν S είναι συνεκτικό και $F: S \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη με $dF_p = 0$, $\forall p \in S$, τότε η F είναι σταθερή.

► Έστω S κανονική επιφάνεια και $\tilde{S}$ γεωμετρικώς ισότιμη με S.
Δηλαδή, $\exists\ T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ τ.ω. $\tilde{S} = T(S)$



Εφόσον, η $\tilde{S}$ είναι κανονική επιφάνεια και μάλιστα αν $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της S τότε $\tilde{X} = T \circ X : U \to \tilde{S}$ είναι σύστημα συντεταγμένων. □

* *

Κανονικές $\boxed{\text{Παραμετρικές}}$ επιφάνειες

ορισμός Καλούμε κανονική παραμετρική επιφάνεια κάθε λεία απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(u,v) \longmapsto X(u,v)$, η οποία πληροί:

$$\boxed{X_u \times X_v (u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U}$$

στροφή στον $\mathbb{R}^3$ είναι ως προσόζονα

πρόταση Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια $\forall q \in U$ υπάρχει ανοιχτό $U_0 \subseteq U$ με $q \in U_0$ και $X(U_0)$ είναι κανονική επιφάνεια.

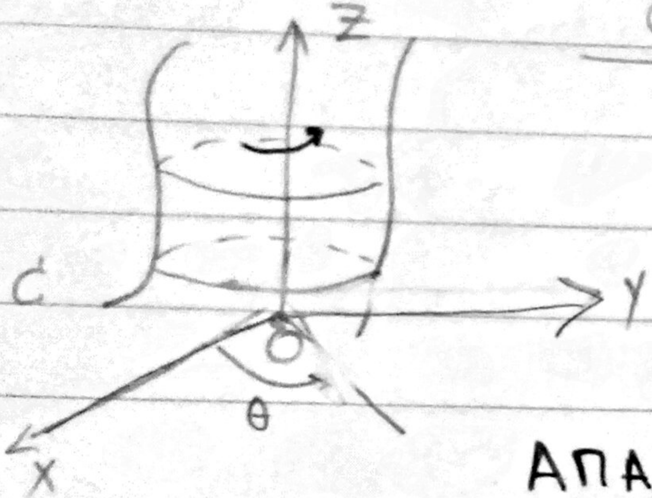
- Οι παραμετρικές επιφάνειες $X, \tilde{X}: U \to \mathbb{R}^3$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν και μόνο αν $\exists\, T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τω $\tilde{X} = T \circ X$

$$d\tilde{X}_q = dT_{X(q)} \circ dX_q \qquad T = T_a \circ A$$

$$dT_p = dA_p = A$$

Μια σημαντική κατηγορία κανονικών παραμετρικών επιφανειών

Εκ περιστροφής επιφάνειας



Θεωρώ καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

με $c(t) = (f(t), 0, g(t))$

Η παραμετρική επιφάνεια που προκύπτει

$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

ΑΠΑΙΤΗΣΗ $f > 0$! (δηλ. η καμπύλη να μην τέμνει ποτέ τον άξονα εκ περιστροφής)

πίνακας στροφής γύρω
από τον άξονα Oz

Απαίτηση C κανονική!

$$x(t,\theta)=(f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t))$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

καλείται εκ περιστροφής επιφάνειας που παράγεται από περιστροφή της καμπύλης C γύρω από τον άξονα Oz.

Ερώτημα: Είναι κανονική η X;

Απάντηση

Παίρνω τις μερικές παραγώγους

$$X_t(t,\theta)=(f'(t)\cos\theta,\ f'(t)\sin\theta,\ g'(t))$$

$$X_\theta(t,\theta)=(-f(t)\sin\theta,\ f(t)\cos\theta,\ 0)$$

Σχόλιο:

για $f=0$ η καμπύλη θα χτυπά τον άξονα εκ περιστροφής

$$X_\theta(t,\theta) = (-f(t)\sin\theta,\ f(t)\cos\theta,\ 0)$$

$$X_t \times X_\theta(t,\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f'(t)\cos\theta & f'(t)\sin\theta & g'(t) \\ -f(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

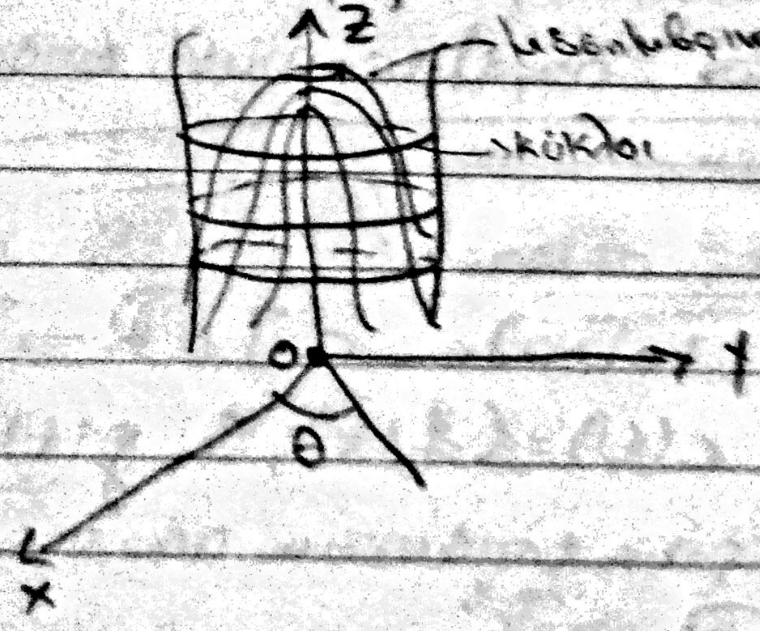
$$= (-f(t)g'(t)\cos\theta,\ f(t)g'(t)\sin\theta,\ f(t)f'(t))$$

Υπολογίζω το μήκος $\|X_t \times X_\theta(t,\theta)\|$.

$$\|X_t \times X_\theta(t,\theta)\| = |f(t)|\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$$ □

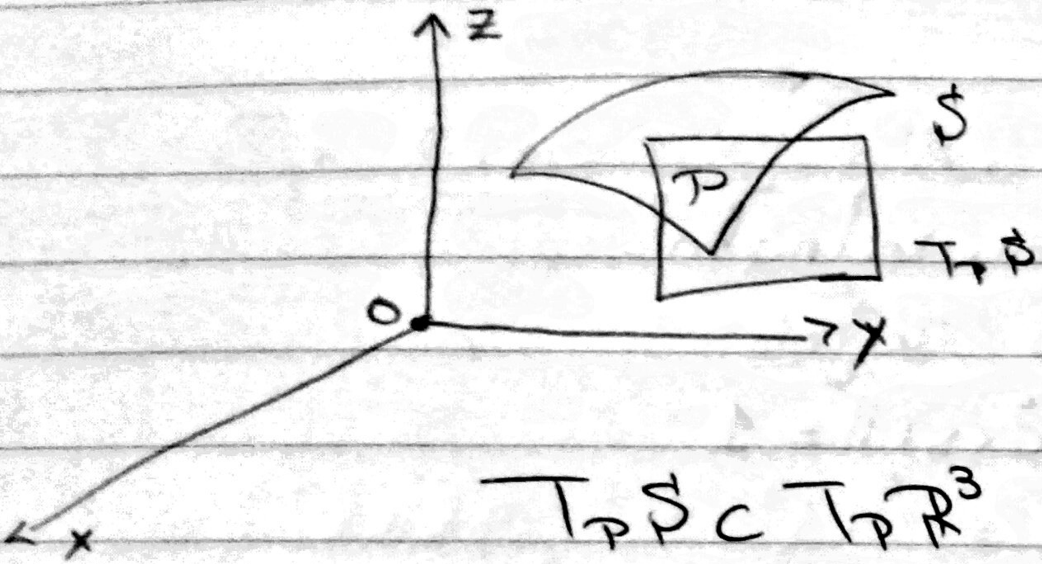
- $X(t, \theta=$ σταθερό$)$ οι καμπύλες που ονομάζονται μεσημβρινούς
- $X(t=$ σταθερό$, \theta)$ οι καμπύλες που είναι παράλληλοι κύκλοι

- $X(t, \theta = \text{σταθερό})$ οι καμπύλες που σχηματίζονται μεσημβρινούς
- $X(t = \text{σταθερό}, \theta)$ οι καμπύλες που είναι παράλληλοι κύκλοι



Το εσωτερικό γινόμενο είναι το εργαλείο που μας επιτρέπει να κάνουμε γεωμετρία

Παρατήρηση:



$T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3$, $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τον εξής τύπο:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad x=(x_1,x_2,x_3)$$
$$y=(y_1,y_2,y_3)$$

Ο περιορισμός του εσωτερικού γινομένου $\langle\ ,\ \rangle$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS ορίζει <u>εσωτερικό γινόμενο</u>

$\langle\,,\,\rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$, $(\omega_1, \omega_2) \longmapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_p$

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι η απεικόνιση

$$I_p : T_pS \to \mathbb{R} \qquad I_p(\omega) = \langle \omega, \omega \rangle_p = \|\omega\|^2$$

$$I_p(\omega_1 + \omega_2) = \|\omega_1 + \omega_2\|^2 = \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 + 2\langle \omega, \omega \rangle_p$$

$$\Rightarrow I_p(\omega_1 + \omega_2) = I_p(\omega_1) + I_p(\omega_2) + 2\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_p$$

Άρα,

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_p = \frac{1}{2}\left\{ I_p(\omega_1 + \omega_2) - I_p(\omega_1) - I_p(\omega_2) \right\}$$

η I_p καλείται 1η Θεμελιώδης μορφή.